ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik
Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

Übungsaufgaben – Blatt Z1

Zürich, 2. Dezember 2016

Die folgenden Aufgaben sind als Ergänzung zur Prüfungsvorbereitung gedacht. Ihre Bearbeitung ist freiwillig, es gibt hierfür keine Punkte.

Aufgabe Z1

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\begin{aligned} L_{q_i} = \{\text{Kod}(M)\#x\#0^i \mid\ & x \in \{0,1\}^*, i \in \mathbb{N}, M \text{ hat mindestens } i+1 \text{ Zustände} \\ & \text{und während der Berechnung von } M \text{ auf } x \text{ wird der } i\text{-te} \\ & \text{Zustand von } M \text{ mindestens einmal erreicht}\} \end{aligned}$$

nicht rekursiv ist.

Aufgabe Z2

Zeigen Sie, dass die Sprache

$$\begin{aligned} L'_{q_i} = \{\text{Kod}(M)\#0^i \mid\ & i \in \mathbb{N}, M \text{ hat mindestens } i+1 \text{ Zustände und es gibt ein Wort } x, \\ & \text{so dass während der Berechnung von } M \text{ auf } x \text{ der } i\text{-te} \\ & \text{Zustand von } M \text{ mindestens einmal erreicht wird}\} \end{aligned}$$

nicht rekursiv ist.

Aufgabe Z3

Zeigen Sie, ohne den Satz von Rice anzuwenden, dass die Sprache

$$L_{\text{EQ},\lambda} = \{\text{Kod}(M)\#\text{Kod}(\overline{M}) \mid \lambda \in L(M) \iff \lambda \in L(\overline{M})\}$$

nicht rekursiv ist.

ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
`http://www.ita.inf.ethz.ch/theoInf16`

Übungsaufgaben – Blatt Z2

Zürich, 2. Dezember 2016

Die folgenden Aufgaben sind als Ergänzung zur Prüfungsvorbereitung gedacht. Ihre Bearbeitung ist freiwillig, es gibt hierfür keine Punkte.

Aufgabe Z4

Sei Σ ein beliebiges Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$. Sei $w = a_1 a_2 \ldots a_m$ ein Wort, mit $a_i \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq m$. Wir sagen, dass ein Wort $x = b_1 b_2 \ldots b_n$ eine *Teilsequenz* von w ist, falls $n \leq m$ und Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ existieren, so dass $x_j = w_{i_j}$ gilt für alle $1 \leq j \leq n$. Anschaulich kommen also alle Zeichen von x in derselben Reihenfolge in w vor, aber nicht notwendigerweise direkt aufeinanderfolgend.

Ein Wort w über Σ ist eine *Davenport-Schinzel-Sequenz* der Ordnung d, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Keine zwei aufeinanderfolgenden Zeichen in w sind gleich,

(ii) für alle $a, b \in \Sigma$ mit $a \neq b$ gilt, dass es keine Teilsequenz $(ab)^{1+(d/2)}$ (für gerade d) oder $(ab)^{(d+1)/2}a$ (für ungerade d) in w gibt.

Geben Sie eine aussagenlogische Formel in KNF an, die beschreibt, ob es für ein gegebenes Alphabet Σ mit $|\Sigma| = k \geq 2$ und eine Wortlänge m eine Davenport-Schinzel-Sequenz der Ordnung 2 und der Länge m über Σ gibt.

Aufgabe Z5

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *dominierende Menge* (*dominating set*) ist eine Teilmenge $D \subseteq V$ der Knoten, so dass jeder Knoten von G in D liegt oder mindestens einen Nachbarn in D hat. Das *Dominating-Set-Problem* (DS) wird beschrieben durch die Menge aller Paare (G, k), bestehend aus einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ und einer natürlichen Zahl k, so dass G eine dominierende Menge der Grösse höchstens k hat. Zeigen Sie VC $\leq_p$ DS.

(bitte wenden)

Aufgabe Z6

Das *Subset-Sum-Problem* (kurz SUBSET-SUM) ist das folgende Entscheidungsproblem: Gegeben eine endliche Menge $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ von natürlichen Zahlen, und eine natürliche Zahl t, ist zu entscheiden, ob es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt, so dass $\sum_{x \in U} x = t$. Wir wollen zeigen, dass

$$\text{3-SAT} \leq_p \text{SUBSET-SUM}$$

gilt.

Für eine Reduktion müssen wir aus einer Formel in 3-KNF eine Instanz des Subset-Sum-Problems konstruieren. Sei also $\Phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ eine Formel in 3-KNF über der Variablenmenge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass jede Variable x_i in mindestens einer Klausel C_j vorkommt und dass in keiner Klausel der Formel eine Variable und ihre Negation gemeinsam vorkommen.

Wir konstruieren jetzt für jede Variable x_i zwei $(n+k)$-stellige Dezimalzahlen r_i und r'_i und für jede Klausel C_j zwei $(n+k)$-stellige Dezimalzahlen s_j und s'_j. Die Menge S der SUBSET-SUM-Instanz wird aus genau diesen $2(n+k)$ Zahlen bestehen.

Die Idee der Konstruktion ist, dass jede der ersten n Stellen der Zahlen einer der Variablen zugeordnet ist und jede der letzten k Stellen einer Klausel. Mit $x[l]$ bezeichnen wir die l-te Stelle von $x \in S$, d. h. $x = x[1]x[2] \ldots x[n+k]$.

Damit können wir die Zahlen in S für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $1 \leq j \leq k$ und die gewünschte Summe t definieren durch

$$r_i[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \text{ oder } (n+1 \leq l \leq n+k \text{ und } x_i \text{ kommt als Literal in } C_{l-n} \text{ vor}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r'_i[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \text{ oder } (n+1 \leq l \leq n+k \text{ und } \overline{x_i} \text{ kommt als Literal in } C_{l-n} \text{ vor}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_j[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = n+j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s'_j[l] = \begin{cases} 2 & \text{für } l = n+j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$t[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq l \leq n \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für diese Reduktion gilt, dass Φ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt mit $\sum_{x \in U} x = t$.

http://www.springer.com/978-3-658-06432-7

Theoretische Informatik
Formale Sprachen, Berechenbarkeit,
Komplexitätstheorie, Algorithmik, Kommunikation und
Kryptographie
Hromkovič, J.
2014, XVIII, 349 S. 87 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-06432-7